Intégrales généralisées

Soit $I = [a,b]$ fermé borné de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Il est possible de définir l'intégrale de Riemann $\int_a^b f(t)\,dt$ comme limite de somme de Riemann. Notre but est d'étendre cette définition à des fonctions définies sur l'ouvert $I =]a,b[$ borné ou non.

Par exemple peut-on donner un sens à

$$\int_0^{+\infty} \ln(x)\,dx \,?$$

I. Intégrale généralisée d'une fonction continue sur $[a,b[$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

I.1. Définitions.

Définition 1 Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, la fonction f est continue sur $[a,b[$. On pose $\forall x \in [a,b[$ $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ la primitive de f qui s'annule en a.

Si $\lim_{x \to b} F(x)$ existe et est finie, on dit que l'intégrale généralisée converge et on note

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x \to b} F(x)$$

Sinon on dit que l'intégrale généralisée diverge.

Remarques

1. De même on définit $\int_a^b f(t)\,dt$ lorsque f est définie continue sur $]a,b]$ (c.à.d. $b \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

2 - La nature de l'intégrale généralisée dépend du comportement de f au voisinage en b.

Soit $c \in [a, b[$, alors

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \underbrace{\int_c^x f(t)\,dt}_{G(x)}$$

$$= \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^x f(t)\,dt$$

Donc si $\int_a^b f(t)\,dt$ converge vers l, alors $\int_c^b f(t)\,dt$ converge vers $l - F(c)$. La valeur de l'intégrale est modifiée mais pas sa nature.

3. Il n'y a pas de condition nécessaire de convergence.

<u>Définition 2</u> Le reste d'une intégrale généralisée convergente est une fonction notée R définie par

$$R(x) = \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \quad \forall x \in [a, b[.$$

<u>Exemples standards</u> : Intégrales de Riemann. (*)

1°| $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge ssi $\alpha > 1$ et dans ce cas

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

2°| $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge ssi $\alpha < 1$ et dans ce cas $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \frac{1}{1-\alpha}$.

Les preuves se font par calcul direct de la primitive.

<u>Exercice</u> Etudions les intégrales suivantes :

1°| $\int_0^1 \ln(t)\,dt$. La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est continue sur $]0, 1]$

La primitive de $\ln(t)$ qui s'annule en 1 est $t\ln t - t + 1$.

$\dots = \int_x^1 \ln(t)dt = x - x\ln(x) - 1 \xrightarrow[x\to 0^+]{} -1$

$\int_0^1 \ln(t)dt$ converge et elle est égale à -1.

2°) $\int_1^{+\infty} \ln(t)dt$ diverge car

$$F(x) = \int_1^x \ln(t)dt = x(-1+\ln(x)) + 1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

3°) $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ converge et vaut 1.

4°) $\int_0^{+\infty} \sin(t)dt$ diverge.

Définition 3. (Extension de la définition 1)

On considère une fonction f continue sur $]a,b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ est convergente s'il existe $c \in]a,b[$ t.q. les intégrales $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent et dans ce cas on a

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Le choix de c est arbitraire.

Exemples

1°) $\int_{-\infty}^{+\infty} t\,dt$, 2°) $\int_0^{+\infty} \ln(t)dt$, 3°) $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}dt$ 4°) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}dt$.

I.2 Propriétés des intégrales généralisées convergentes

Théorème 1 Soit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et 2 fonctions f et g continues sur $]a,b[$. On suppose $\int_a^b f(t)dt$ converge, alors on a les propriétés suivantes :

1. Relation de Chasles : $\forall c \in]a,b[$

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

2. Linéairité $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b [\lambda f(t) + \mu g(t)]\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \mu \int_a^b g(t)\,dt$$

dès que deux intégrales sur les trois convergent

3- Si $f \geqslant 0$ sur $]a,b[$, alors $\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$

4- Si $f > 0$ sur $]a,b[$, alors $\int_a^b f(t)\,dt > 0$

5- Si $f \geqslant g$ sur $]a,b[$, alors $\int_a^b f(t)\,dt \geqslant \int_a^b g(t)\,dt$.

II.3. Méthodes de Calcul

a/ Par primitive ou intégration par partie

Soit f continue sur $[a,b[$, on pose $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

Pour calculer F on utilise les méthodes classiques de calcul d'une intégrale d'une fonction continue sur un fermé borné.

b/ Par changement de variable

Cette méthode peut être utilisée directement sur l'intégrale généralisée sans modification de la nature, et de sa valeur s'il y a convergence.

Théorème 2 Soit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, f continue sur $]a,b[$.

On considère $\phi :]a,b[\longrightarrow]l_1, l_2[$ de classe C^1 strictement monotone avec $l_1 = \lim_{t \to a} \phi(t)$ et $l_2 = \lim_{t \to b} \phi(t)$

Alors les intégrales

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\,dt \text{ et } \int_{l_1}^{l_2} f(u)\,du$$

sont de même nature.

De plus si l'une converge l'autre converge et elles sont égales.

Exemple Etudions $I=\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^2}dt$ avec $x=\text{Arctan}\,t$

$\phi(t)=\text{Arctan}\,t$

ϕ est de classe C^1 strictement monotone sur $[0,+\infty[$ et $\phi(0)=0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}\phi(t)=\frac{\pi}{2}$.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\tan(x))^2}{(1+(\tan x)^2)}dt=\int_0^{\pi/2}\sin^2(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2x)dx=\frac{\pi}{4}.$$

III. Cas où f est une fonction positive sur $[a,b[$

~~(fonctions de signe constants au voisinage de b)~~

Résultats sur les fonctions monotones.

a/ Toute fonction croissante et majorée sur $[a,b[$ admet une limite finie en b.

b/ Toute fonction croissante et non majorée sur $[a,b[$ admet une limite infinie en b.

III.1. Condition nécessaire et suffisante de convergence

Théorème 3 Soit $-\infty\le a<b\le+\infty$ et f continue et positive sur $[a,b[$.

On pose $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ alors

i/ $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si F est majorée sur $[a,b[$

ii/ $\int_a^b f(t)dt$ diverge si $\lim\limits_{x\to b}F(x)=+\infty$

(F croissante car f positive)

III.2. Théorème de comparaison

<u>Théorème 4</u> : Soit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et deux fonctions f et g continues et positives sur $[a,b[$. S'il existe $c \in [a,b[$ t.q. $\forall x \in [c,b[$ $\quad 0 \leq f(x) \leq g(x)$ alors

1°/ $\int_a^b g(t)\,dt$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt$ converge.

2°/ $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge $\Rightarrow \int_a^b g(t)\,dt$ diverge.

<u>Remarque</u> : La positivité est une hypothèse fondamental dans ce résultat.

<u>Exemple</u> : $\quad -x \leq \frac{1}{x^2} \; \forall x \in [1,+\infty[$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge alors que $\int_1^{+\infty} -x\,dx$ diverge.

<u>Corollaire</u>. <u>Règle des équivalents</u>

Soit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, f et g 2 fonctions continues et <u>positives</u> sur $[a,b[$ $\quad$ si f est équivalent à g en b soit $f \underset{b}{\sim} g$, alors $\int_a^b g(t)\,dt$ et $\int_a^b f(t)\,dt$ sont de même nature.

En effet $\quad f \underset{b}{\sim} g \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Donc au voisinage de b, on a :

$$1 - \varepsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq 1 + \varepsilon \qquad \left(\lim_{x \to b^-} \varepsilon(x) = 0 \right)$$

$$(1-\varepsilon)\, g(x) \leq f(x) \leq (1+\varepsilon)\, g(x)$$

et par suite d'après le théorème 4, $\int_a^b f(x)\,dx$ et $\int_a^b g(x)\,dx$ sont de même nature.

Exemples

1°) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x+\sqrt{x^3+1}}$ est convergente car

$\frac{1}{x+\sqrt{x^3+1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{3/2}}$. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ converge ($\overset{3/2}{=\alpha} > 1$)

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+\sqrt{x^3+1}}$ cv $\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x+\sqrt{x^3+1}}$ converge.

2°) $\int_0^1 \frac{\text{Arctan}\, x^2}{x^{5/2}} dx$ est convergente car

$\frac{\text{Arctan}\, x^2}{x^{5/2}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^{1/2}}$. $\forall x \in]0,1]$

$\geqslant 0$ $\quad\geqslant 0$

$\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$ cv $\left(\alpha = \frac{1}{2} < 1 \right) \Rightarrow \int_0^1 \frac{\text{Arctan}\, x^2}{x^{5/2}} dx$ converge.

Remarque

Si f admet une limite finie non nulle en $+\infty$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge. (*)

Mais, une intégrale peut être convergente sans que la fonction tende vers 0.

Par exemple $\int_1^{+\infty} \cos(x^2)dx$. (Cf les séries (*))

IV Convergence absolue

Définition Soit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et f une fonction continue sur $[a,b[$.

Si $\int_a^b |f(t)|dt$ converge, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente.

→ suite

Si $\int_a^b f(t)dt$ convergente et $\int_a^b |f(t)|\,dt$ diverge, on dit que $\int_a^b f(t)\,dt$ est semi-convergente.

Exemple (voir T.D.)

<u>Théorème 5</u> : Soit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et f une fonction continue sur $[a,b[$.

Si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge et dans ce cas

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

<u>Preuve</u>. L'astuce est d'écrire.

$$f = (f + |f|) - |f|.$$

Si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est abs. convergente

$$0 \leq f + |f| \leq 2|f|$$

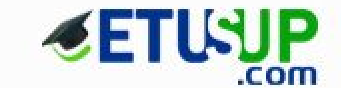
Les intégrales $-\int_a^b |f(t)|\,dt$ et $\int_a^b (f + |f|)\,dt$ sont convergentes

Donc par linéarité $\int_a^b f(t)dt$ converge et

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b (f(t) + |f(t)|)\,dt - \int_a^b |f(t)|\,dt$$

$\forall x \in [a,b[$
$$\left|\int_a^x f(t)dt\right| \leq \int_a^x |f(t)|\,dt \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$$

$$\Rightarrow \left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt.$$



continue.

Règle d'Abel

Soit f une fonction positive et décroissante vers 0 sur $[a, +\infty[$. Soit g une fonction continue admettant une primitive bornée sur $[a, +\infty[$. Alors l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,g(t)\,dt$$

converge.

Exemple. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$

En 0, $\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$. donc $\frac{\sin t}{t}$ est prolongeable par continuité en 0.

En $+\infty$, $f(t) = \frac{1}{t}$ est positive, décroissante sur $[1, +\infty[$ et la fonction $g(t) = \sin t$ continue sur $[1, +\infty[$ admettant une primitive $-\cos t$ bornée sur $[1, +\infty[$.

Ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ est convergente

Critère de Riemann

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$.
f est une fonction de signe quelconque au voisinage de b.
Il s'agit d'un critère de comparaison avec les intégrales de Riemann.

1°/ $b = +\infty$

s'il existe $\alpha > 1$ t.q. $t^\alpha f(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est absolument convergente

s'il existe $\alpha \leq 1$ t.q. $t^\alpha f(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est divergente

2°/ $b \in \mathbb{R}$

s'il existe $\alpha < 1$ t.q. $(b-t)^\alpha f(t) \underset{t \to b^-}{\longrightarrow} 0$, alors $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente.

s'il existe $\alpha \geq 1$ t.q. $(b-t)^\alpha f(t) \underset{t \to b^-}{\longrightarrow} +\infty$ alors $\int_a^b f(t)dt$ est divergente.

Cas de fonctions de signe ~~quelcon~~ non constant

Pour l'étude, on suit le processus suivant

1°/ s'assurer que la fonction n'est pas de signe constant au voisinage de b.

2°/ Etudier l'absolue convergence.

3°/ Si on n'a pas l'absolue convergence, on peut alors effectuer une intégration par parties ou un changement de variables.

4°/ Enfin, on se débrouille, comme on peut.

Supplément

- L'intégrale $I = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ est convergente car $\int_0^x e^{-t} dt = 1 - e^{-x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

Ceci permet de définir les fonctions dites d'ordre exponentiel, c'est à dire les fonctions $f(x)$ pour lesquelles l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx \text{ est convergente.}$$

Les fonctions $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ sont d'ordre exponentiel.

Transformée de Laplace


ETUSUP.com